

Esame di Stato — Liceo Scientifico Matematica — 2012

21 giugno 2012

Problema 1

Punto 1

Il periodo della funzione $\sin(x)$ è 2π . Quindi il periodo di una funzione del tipo $\sin(\lambda x)$, per $\lambda > 0$, è $\frac{2\pi}{\lambda}$. Nel nostro caso, il periodo di $g(x)$ è $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{3}$.

La funzione f ha la forma $f(x) = |h(x)|$, per $h(x) = 27x^3$ un polinomio di terzo grado. Per alcuni aspetti, è conveniente studiare la funzione $h(x)$, e dedurre le proprietà di f in un secondo tempo. Il polinomio $h(x)$ è dispari, ha uno zero triplo in $x = 0$, che è anche un punto di flesso orizzontale. Non ha altri zeri, né massimi o minimi. Il segno di $h(x)$ è positivo e negativo rispettivamente per x positivo e negativo. Da questo deduciamo che $f(x) = h(x)$ per $x \geq 0$ e $f(x) = -h(x)$ per $x \leq 0$. Il resto dell'analisi si basa su questa osservazione. Si deduce che $f(x)$ è positiva ovunque, tranne per $x = 0$, suo unico punto di minimo, e che la derivata prima è $f'(x) = 81x|x|$, che è quindi positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$, e nulla per $x = 0$ (ma continua). Questo implica che non ci sono massimi o minimi, oltre ad $x = 0$. Similmente, la derivata seconda è $f''(x) = 162|x|$, è positiva ovunque, tranne che per $x = 0$, dove è nulla (ma continua). Quindi non ci sono flessi. Una caratteristica interessante della funzione $f(x)$ è che essa ha derivata terza discontinua in $x = 0$ (i limiti destro e sinistro sono ± 162 , e infatti $f'''(x)$ vale 162 volte la funzione gradino). Tutte le ulteriori derivate sono nulle per $x \neq 0$.

La funzione $g(x)$ è una funzione trigonometrica, dispari. Essa è continua, insieme a tutte le sue derivate (fatto semplice da verificare, dato che la derivata seconda è proporzionale alla funzione). Si annulla in tutti e soli i punti della forma $x = \frac{2}{3}k$, per k intero. È positiva o negativa (e con derivata seconda negativa o positiva, rispettivamente) se $\lfloor \frac{3}{2}x \rfloor$ è pari o dispari. Similmente, essa è crescente o decrescente (e con derivata terza negativa o positiva) se $\lfloor \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rfloor$ è pari o dispari, e quindi ha massimi nei punti della forma $x = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$ e minimi nei punti della forma $x = \frac{2}{3}k + 1$, sempre per k intero.

I grafici G_f e G_g sono pertanto come illustrato in Figura 1.

Punto 2

L'equazione della retta r si deduce dal calcolo di $f(x)$ ed $f'(x)$ per $x = \frac{1}{3}$. Abbiamo $f(\frac{1}{3}) = 1$ ed $f'(\frac{1}{3}) = 9$, da cui r soddisfa l'equazione $(y-1) = 9(x-\frac{1}{3})$, ovvero $y = 9x - 2$. Similmente per la retta s , e la funzione $g(x)$, abbiamo

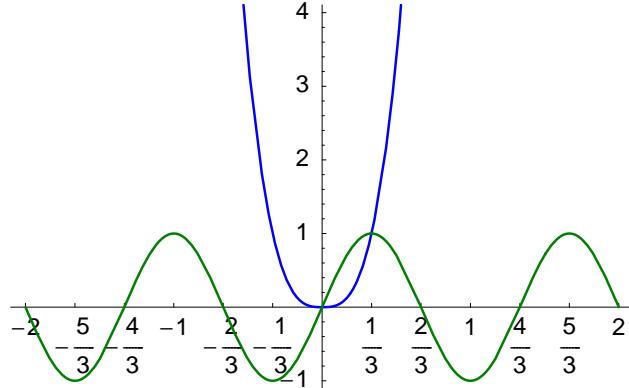


Figura 1: I grafici G_f e G_g del Problema 1, punto 1 (G_f : blu; G_g : verde).

$g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, da cui $y = 1$ (la retta s è orizzontale). Questa proprietà era già stata evidenziata dallo studio dei massimi di $g(x)$. L'angolo acuto formato da r ed s è pertanto $\arctan(9) = 83.6598\dots \simeq 83^\circ 40'$.

Punto 3

I grafici G_f e G_g si intersecano soltanto in due punti, di ascissa $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$. La presenza di queste due intersezioni si verifica facilmente. La presenza di ulteriori intersezioni si esclude grazie al seguente ragionamento. Nell'intervallo $x \in [-\frac{1}{3}, 0]$ si ha $f(x) > 0 > g(x)$, negli intervalli $|x| > \frac{1}{3}$ si ha $f(x) > 1 > g(x)$, infine, nell'intervallo $x \in (0, \frac{1}{3})$ si ha $g(x) > 3x > f(x)$ (quest'ultima proprietà si deduce dallo studio della derivata seconda, effettuato al punto 1, e dalla presenza di due intersezioni, anche con la retta $y = 3x$, per $x = 0$ e $x = \frac{1}{3}$).

L'area di R si calcola quindi per differenza fra i due integrali definiti, con gli estremi sopra citati. Si ha, per ogni $x > 0$,

$$\int_0^x dx' f(x') = \frac{27}{4}x \quad \int_0^x dx' g(x') = -\frac{2}{3\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \right] \quad (1)$$

e quindi

$$\text{Area}(R) = \int_0^{\frac{1}{3}} dx' (g(x') - f(x')) = \frac{8 - \pi}{12\pi} \quad (2)$$

Le rette r ed s , e la regione R , sono illustrate in Figura 2.

Punto 4

Il solido S si ottiene dalla differenza (insiemistica) del solido S_g , ottenuto dalla rotazione della regione delimitata da $g(x)$, $x = \frac{1}{3}$ e $y = 0$, e dell'analogo solido S_f , poiché $S_g \supset S_f$. Quindi, nuovamente possiamo calcolare il volume per sottrazione. I due volumi sono

$$\text{Vol}(S_f) = \int_0^{\frac{1}{3}} dx \pi f(x)^2 \quad \text{Vol}(S_g) = \int_0^{\frac{1}{3}} dx \pi g(x)^2 \quad (3)$$

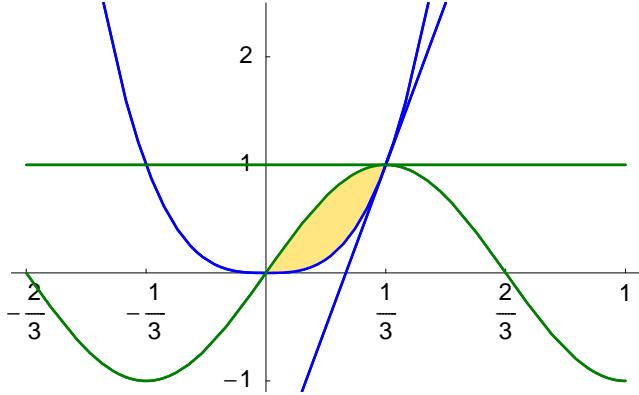


Figura 2: Ingrandimento della figura 1. Le rette r ed s sono in blu e verde, e la regione R è in giallo.

poiché gli elementi infinitesimali di volume derivanti dalla divisione di questi solidi in “fette” ortogonali all’asse delle ascisse sono dei cilindri di raggio $f(x)$ e altezza dx . Abbiamo quindi

$$\text{Vol}(S) = \int_0^{\frac{1}{3}} dx \pi \left[\sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi x \right) - 729x^6 \right] \quad (4)$$

In realtà, anche se non richiesto, questo integrale non è difficile da eseguire, e si ottiene $\text{Vol}(S) = \frac{5\pi}{42}$.

Grazie al fatto che entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone non-decrescenti nell’intervallo $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, il volume del solido T si può calcolare con una procedura analoga, introducendo le inverse di f e di g , definite sull’intervallo $[0, 1]$, ed a valori in $[0, \frac{1}{3}]$. Si ha

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}} \quad g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi} \arcsin(y) \quad (5)$$

e quindi

$$\text{Vol}(T) = \int_0^1 dy \pi \left[(f^{-1}(y))^2 - (g^{-1}(y))^2 \right] \quad (6)$$

Alternativamente, senza coinvolgere le funzioni inverse (ma ancora utilizzando la monotonicità), si può sfruttare la parametrizzazione naturale indotta dall’asse delle ordinate, ovvero il fatto che gli elementi infinitesimali di volume derivanti dalla divisione dei solidi in questione in “fette” ortogonali all’asse delle ordinate sono dei cilindri di raggio x e altezza $dx f'(x)$. Questo produce

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \int_0^{\frac{1}{3}} dx \pi x^2 [f'(x) - g'(x)] \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} dx \pi x^2 \left[81x^2 - \frac{3}{2}\pi \cos \left(\frac{3}{2}\pi x \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Di nuovo, sebbene non richiesto, questo integrale si può calcolare facilmente (nota che bisogna integrare per parti due volte il termine della forma $x^2 \cos(\lambda x)$), ottenendo $\text{Vol}(T) = \frac{8}{9\pi} - \frac{2\pi}{45}$.

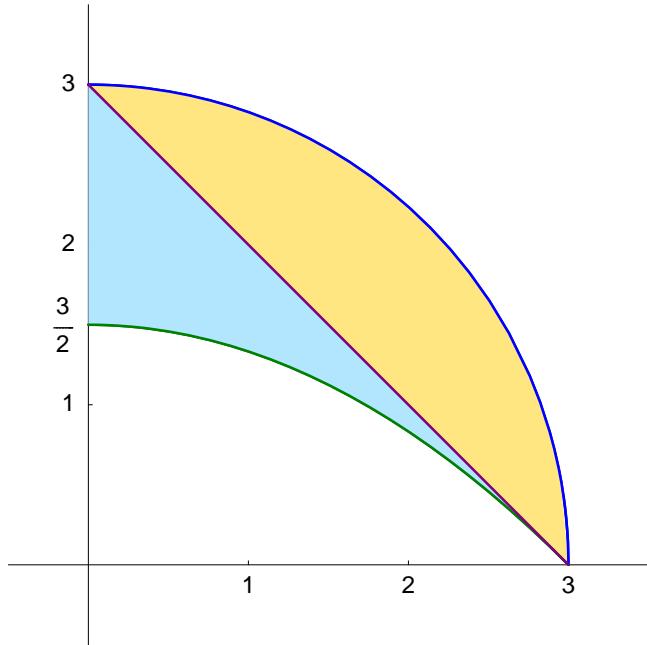


Figura 3: In blu, verde e viola, l'arco di cerchio, l'arco di parabola L , e la retta r . In giallo e azzurro, le regioni R^+ e R^- .

Problema 2

Punto 1

La parabola ha equazione $y = \frac{9-x^2}{6}$. La derivata per $x = 3$ è -1 , quindi la retta ha equazione $y = 3 - x$. Accidentalmente, essa passa per B . Dato che sia la parabola che l'arco di cerchio hanno concavità verso il basso in tutto l'intervallo $[0, 3]$, non ci sono ulteriori intersezioni, e la regione R risulta divisa in due regioni R^\pm connesse. La regione superiore consiste in un quarto di cerchio, di raggio 3, meno (differenza insiemistica) il triangolo di vertici $((0,0), (3,0), (0,3))$, ed ha pertanto area

$$\text{Area}(R^+) = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9(\pi - 2)}{4} \quad (8)$$

La regione inferiore è delimitata dall'asse delle ordinate, e da due curve, la parabola e la retta, di cui la primitiva è facilmente calcolabile, per cui è convenientemente calcolata attraverso un integrale

$$\text{Area}(R^-) = \int_0^3 dx \left((3-x) - \frac{9-x^2}{6} \right) = \frac{3}{2} \quad (9)$$

Le regioni R^\pm sono illustrate in Figura 3.

Punto 2

Le informazioni su W sono insufficienti a ricavarne la sua esatta forma, ma sufficienti per la determinazione del volume. Inoltre, l'infomazione sul fatto che

R sia la sua base è irrilevante. La superficie delle sezioni, e l'intervallo delle ascisse su cui queste sezioni sono non nulle, sono gli ingredienti necessari a dare una formulazione integrale del volume in questione, ovvero

$$\text{Vol}(W) = \int_0^3 dx S(x) = \int_0^3 dx e^{5-3x} = \frac{1}{3}(e^5 - e^{-4}) \quad (10)$$

Punto 3

Il solido di rotazione è la differenza insiemistica di una semi-sfera di raggio 3, e del solido ottenuto dalla rotazione della superficie delimitata da L e dai due assi. Il primo volume è ovviamente $\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} 3^3 = 18\pi$. Il secondo si ottiene dall'integrale (vedi la discussione al Problema 1)

$$\int_0^3 dx \pi \left(\frac{9-x^2}{6} \right)^2 = \frac{18\pi}{5} \quad (11)$$

da cui il volume è $\frac{72\pi}{5}$.

Punto 4

Le circonferenze di raggio r tangenti superiormente all'asse delle ascisse hanno centro $(x, y) = (x, r)$. Le circonferenze di raggio r tangentи interiormente all'arco AB hanno centro $(x, y) = ((3-r)\cos\theta, (3-r)\sin\theta)$, per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ovvero $x^2 + y^2 = (3-r)^2$, congiuntamente alle diseguaglianze $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ e $0 \leq r \leq 3$. Imponendo le due equazioni simultaneamente si trova $x^2 + y^2 = (3-y)^2$, ovvero $x^2 = 9 - 6y$. È facile verificare che gli estremi di L sono in accordo con le diseguaglianze date sopra.

Questa costruzione è illustrata in Figura 4.

La circonferenza richiesta al secondo paragrafo del Punto 4 si potrebbe determinare imponendo l'ulteriore condizione $(3-x)^2 + y^2 = (3-r)^2$. Tuttavia, è più semplice sfruttare la simmetria rispetto alla riflessione verticale $x \rightarrow 3-x$, ovvero imporre che l'ascissa del centro è $\frac{3}{2}$. Da questo si ottiene che questa circonferenza ha centro $(\frac{3}{2}, \frac{9}{8})$ e raggio $\frac{9}{8}$.

Questionario

Domanda 1

Questo limite rappresenta, fra le altre cose possibili, il calcolo della derivata del polinomio $f(x) = 5x^4$ nel punto $x = \frac{1}{2}$. Esso vale pertanto $5 \cdot 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{2}$, come ottenibile anche direttamente senza riconoscere l'interpretazione, attraverso una applicazione del metodo di de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(\frac{1}{2} + h)^4 - 5(\frac{1}{2})^4}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dh} \left(5 \left(\frac{1}{2} + h \right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right)}{\frac{d}{dh}(h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 \left(\frac{1}{2} + h \right)^3}{1} = \frac{20 \left(\frac{1}{2} \right)^3}{1} \end{aligned} \quad (12)$$

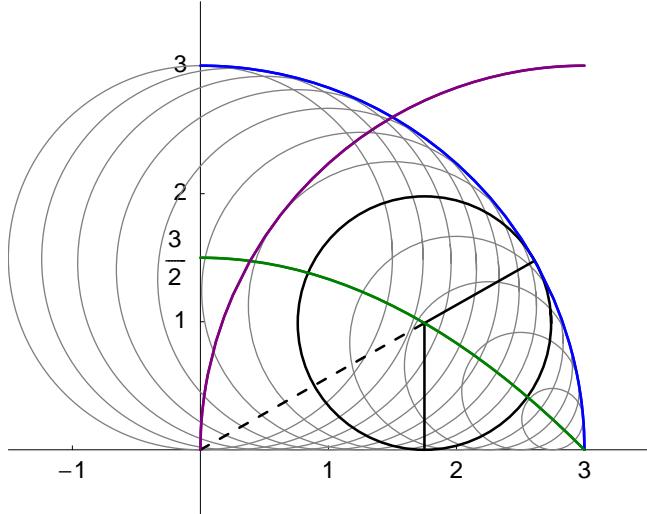


Figura 4: In blu, verde e viola, l'arco di cerchio, l'arco di parabola L , e l'arco di cerchio con centro A . In grigio, il fascio di cerchi i cui centri determinano L . In nero, un cerchio tipico del fascio, e la costruzione illustrata nello svolgimento del problema.

Domanda 2

Un *asintoto* di una funzione f è una retta a cui la funzione data si avvicina indefinitivamente. Le funzioni più semplici che presentano asintoti sono, uniche fra le coniche, le iperboli. Funzioni razionali fratte $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P e Q polinomi, possono avere un asintoto orizzontale, (se il grado di P è minore o uguale al grado di Q) o obliqua (se $\deg(P) - \deg(Q) = 1$). L'asintoto orizzontale coincide con l'asse delle x se e solo se il grado di P è minore di quello di Q . Inoltre, se $\{z_i\}_{1 \leq i \leq k}$ sono le radici reali di Q (senza ripetizioni), e assumendo che queste non siano radici di P , ci saranno i k asintoti verticali $x = z_i$. Pertanto, è facile costruire, all'interno di questa famiglia, una funzione con i requisiti del problema. Ad esempio,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (13)$$

ha l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale, e le due rette $x = \pm 1$ come asintoti verticali.

Questo esempio è illustrato in Figura 5.

Domanda 3

In una dimensione, la velocità $v(t)$ è data dalla derivata della funzione traiettoria $s(t)$, e l'accelerazione $a(t)$ dalla derivata della velocità. Pertanto

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left(20(2e^{-t/2} + t - 2) \right) = 10e^{-t/2} \quad (14)$$

che è facilmente valutata per $t = 4$, $a(4) = 10e^{-2}$.

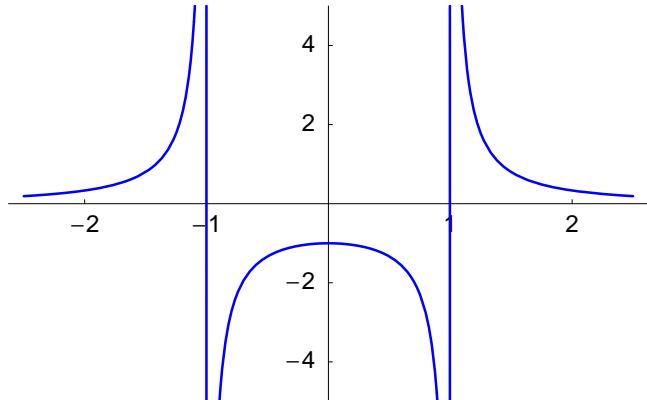


Figura 5: Grafico della funzione fornita come soluzione alla domanda 2.

Domanda 4

Nei coni retti, l'apotema indica il segmento o la distanza del vertice da un qualsiasi punto della circonferenza di base. Pertanto, un apotema di lunghezza L corrisponde a un cono con raggio di base $r = L \cos \theta$, e altezza $h = L \sin \theta$, per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Essendo il volume

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3} L^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \quad (15)$$

otteniamo che l'angolo di volume massimo è quello che massimizza la funzione $f(\theta) = \cos^2(\theta) \sin(\theta)$, ovvero derivando rispetto a θ ed eseguendo un semplice studio di funzione, quello per cui $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Semplici manipolazioni danno quindi $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, da cui

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} L^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = L^3 \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \quad (16)$$

Nel nostro caso

$$V_{\max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} m^3 = \frac{2000\pi}{9\sqrt{3}} \ell \simeq 403.067 \ell \quad (17)$$

Domanda 5

L'assunzione che nessuna terna sia allineata, e nessuna quaterna complanare, implica che il conteggio di segmenti, triangoli e tetraedri è completamente combinatorico, e svincolato da considerazioni geometriche. Le tre risposte sono casi speciali dei coefficienti binomiali, di Newton (o Tartaglia), secondo cui $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ conta i modi di scegliere sottoinsiemi (non ordinati) di m

elementi, in un insieme di n elementi. Nel nostro caso,

$$\text{NSegm}(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (18)$$

$$\text{NTriang}(n) = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (19)$$

$$\text{NTetra}(n) = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad (20)$$

Domanda 6

Calcoli di questa forma si compiono in generale utilizzando la distributività di Leibnitz, $(fg)' = f'g + fg'$, e le derivate elementari delle funzioni trigonometriche, $(\sin(\lambda x))' = \lambda \cos(\lambda x)$ e $(\cos(\lambda x))' = -\lambda \sin(\lambda x)$. Tuttavia, prima di immergersi nel calcolo, è utile semplificare l'espressione di partenza utilizzando alcune identità trigonometriche

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \quad (21)$$

Da questo si ottiene che in realtà, semplicemente, $f(x) = -17$, e quindi $f'(x) = 0$.

Domanda 7

I segmenti ℓ ed h sono ipotenusa e uno dei cateti di un triangolo rettangolo, di cui l'altro cateto ha lunghezza pari a $2/3$ dell'altezza di una faccia, ovvero $\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$, ovvero $\frac{1}{\sqrt{3}} \ell$. Da questo otteniamo che $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Questa costruzione è illustrata in Figura 6.

Domanda 8

$$\bar{f} = \frac{\int_1^e dx f(x)}{e-1} = \frac{\int_1^e dx \frac{1}{x}}{e-1} = \frac{(\ln x)|_1^e}{e-1} = \frac{\ln e}{e-1} = \frac{1}{e-1} \quad (22)$$

Domanda 9

La lunghezza di una traiettoria da A a B che passa da C è data dalla somma delle lunghezze delle due porzioni. Questo porta rapidamente a determinare che il cammino ottimale, nella regione in cui non coincide con la retta, deve essere rettilineo. Quindi, a priori potremmo avere al più una spezzata (A, C, C', B) , con C e C' sulla retta. Tuttavia, a causa della disuguaglianza triangolare, la spezzata (A, C, B) avrebbe lunghezza non superiore. Possiamo quindi restringerci a questa classe di curve.

Un utile stratagemma consiste in riconoscere che, chiamando A' e B' le immagini di A e B per la riflessione rispetto alla retta r , i problemi per la terna $(A, B; r)$ e la terna $(A', B'; r)$ sono analoghi, ed il punto di contatto C ottimale per una terna deve essere ottimale anche per l'altra. Quindi, la lunghezza della spezzata associata ad $(A, B; r)$ è la metà della somma delle due lunghezze delle spezzate associate alle due terne. E quindi è anche uguale alla metà della somma delle spezzate (A, C, B') , e (A', C, B) . Per la disuguaglianza triangolare,

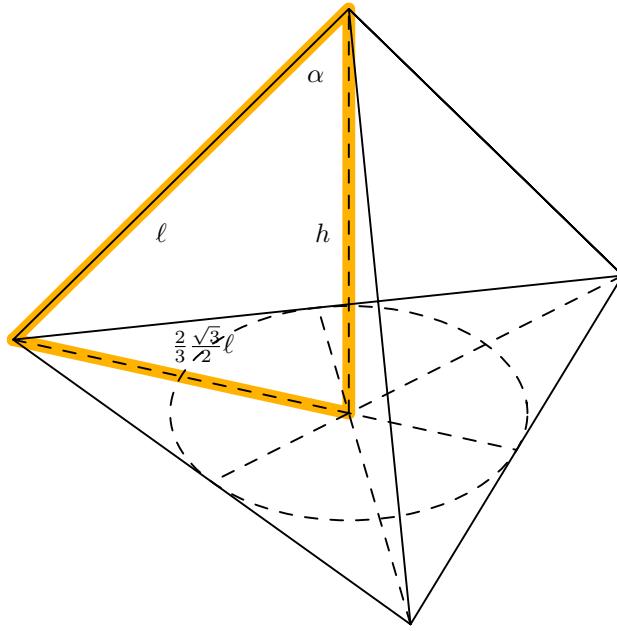


Figura 6: Costruzione del triangolo rettangolo, con angolo α , all'interno del tetraedro regolare descritto alla domanda 7.

scopriamo quindi che C deve trovarsi sul segmento che congiunge A a B' , ed anche su quello che congiunge A' a B (oltre a trovarsi su r).

Questa osservazione permette di risolvere il problema graficamente, con una costruzione con riga e compasso (costruendo ad esempio A' , con due archi di compasso centrati in punti generici di r , che passano per A – questa costruzione è illustrata in Figura 7), ed anche analiticamente. In quest'ultimo caso, sfruttando l'invarianza del problema sotto traslazioni e rotazioni, possiamo assumere che la retta sia l'asse orizzontale. Se i punti hanno coordinate $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, abbiamo quindi $A' = (x_A, -y_A)$, otteniamo $C = (x_C, 0)$ con

$$\frac{x_C - x_A}{y_A} = \frac{x_B - x_C}{y_C} \quad (23)$$

ovvero x_C è una media pesata di x_A e x_B , con pesi proporzionali agli inversi delle ordinate

$$x_C = \frac{x_A y_B + x_B y_A}{y_A + y_B}. \quad (24)$$

La formula $\frac{x_C - x_A}{y_A} = \frac{x_B - x_C}{y_C}$ corrisponde al fatto che gli angoli acuti che i segmenti (AC) e (BC) formano con la retta r sono uguali, ovvero, in combinazione con il principio di Huygens di cammino estremale per i raggi di luce, la regola della riflessione da specchio piano.

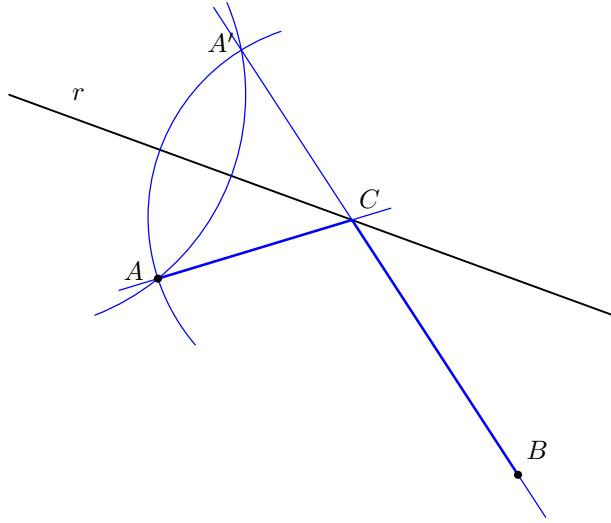


Figura 7: Costruzione con riga e compasso per il problema di Erone, discusso alla domanda 9.

Domanda 10

La funzione $\cos(f(x))$ è positiva per ogni x reale se l'immagine di $f(x)$ è contenuta nell'unione degli intervalli $[2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}]$, per k intero. Similmente, la funzione $\sin(f(x))$ è positiva per ogni x reale se l'immagine di $f(x)$ è contenuta nell'unione degli intervalli $[2\pi k, 2\pi k + \pi]$, per k intero.

Per la funzione A , abbiamo che $f(x) = \sin(g(x)) \in [-1, 1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e quindi soddisfa il criterio sopra citato (nota, la forma di $g(x) = x^2 + 1$ è irrilevante).

Per la funzione B , esistono x per cui $\sin(\cos(x^2 + 1)) = \sin(-1) < 0$, ad esempio per $x = \sqrt{\pi - 1}$.

Per le funzioni C e D , esistono x per cui il valore della funzione è -1 , ad esempio, per C , quando $x = \sqrt{e^{3\pi/2} - 1}$, e per D , quando $x = \sqrt{e^\pi - 1}$.

Quindi soltanto la funzione A è positiva per ogni x reale.

ANDREA SPORTIELLO
 Università degli Studi di Milano, Italia,
 e Université Paris 13 (Paris Nord), Francia.